اختلال

امیر آقامحمدی

چکیده: در این مقاله با ارائه‌یِ تعدادی مثال سعی می‌شود روشِ اختلال معرفی شود. در بخشِ اول مثال‌ها در حوزه‌یِ معادله‌هایِ جبری است. در بخشِ دوم مثال‌هایی در موردِ استفاده از روشِ اختلال در حلِ معادله‌هایِ دیفرانسیل آمده است.

تعدادِ مسائلی که می‌توان دقیق حل کرد نسبت به تعدادِ مسائلی که حلِ دقیق ندارند، یا به سادگی قابلِ حل نیستند، خیلی کم است. اختلال تکنیکی است که گاهی با استفاده از آن می‌توانیم اطلاعاتی، هر چند تقریبی، در موردِ سیستمِ موردِ نظرمان به دست آوریم. البته این تکنیک زمانی به درد می‌خورد که سیستمِ موردِ نظرِ ما در نزدیکیِ سیستمی باشد که حلِ دقیقِ آن را بلدیم. منظور از نزدیکی هم آن است که معادله‌ایِ که می‌خواهیم حل کنیم تنها در عبارتِ کوچکی با معادله‌یِ حل‌پذیر اختلاف داشته باشد. در این‌جا بیش‌ترِ مثال‌هایی که می‌زنیم به روشِ دقیق هم قابلِ حل‌اَند. حسنِ این‌کار این است که می‌توانیم جوابِ دقیق را با جوابِ تقریبی مقایسه کنیم. در برنامه‌یِ رسمیِ آموزشِ فیزیک در دوره‌یِ کارشناسی تقریباً تنها در درسِ مکانیکِ کوانتمی و آن هم در محاسبه‌یِ اختلالیِ مقادیرِ ویژه‌یِ یک عمل‌گر و یا احتمالاً در اختلالِ وابسته به زمان، روشِ اختلال موردِ استفاده‌یِ جدّی قرار می‌گیرد. اما از روشِ اختلال در حلِ معادله‌هایِ جبری، معادله‌یِ دیفرانسیل، انتگرال‌گیری، و $\cdots$ می‌توان استفاده کرد. روشِ اختلال زمانی به کار می‌آید که معادله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم به پارامتری مثلِ ϵ بستگی داشته باشد و این بستگی چنان باشد که بتوان در حالتِ $\epsilon = \epsilon_0$ مسئله را حل کرد. در روشِ اختلال فرض می‌کنیم که جوابِ مسئله را می‌توان بر حسبِ $\epsilon - \epsilon_0$ بسط داد. در این مقاله سعی می‌شود با مثال‌هایِ مختلف این روش معرفی شود.

1 معادله‌هایِ جبری

مثالِ ۱ــ معادله‌یِ $x^2 = 1 + \epsilon$، $(\epsilon \ll 1)$ را در نظر بگیرید. جوابِ این معادله عبارت است از

$$x = \pm\sqrt{1+\epsilon} \approx \pm(1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \cdots). \qquad (1)$$

حالا بیایید این معادله را با روشِ اختلال حل کنیم. اگر ϵ را صفر بگیریم، جوابِ معادله‌یِ (1)، $x_0 = \pm 1$ است. جوابِ معادله‌یِ (1) تابعی از ϵ است. فرض می‌کنیم این تابع بسطِ تیلوری هم‌گرا از ϵ داشته

باشد.

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots . \tag{2}$$

این بسط را در معادله‌ی (1) جاگذاری می‌کنیم.

$$(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots)^2 = 1 + \epsilon \tag{3}$$

دو تابعِ $1+\epsilon$ و $(x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots)^2$ با هم برابرند پس بسطِ تیلور و یا در واقع ضرایبِ بسطِ تیلورِ آن‌ها هم با هم برابرند. پس ضرایبِ توان‌هایِ مختلفِ ϵ در دو طرفِ رابطه‌یِ (3) باید مساوی باشند.

$$\begin{aligned}
&\epsilon^0; \qquad x_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \pm 1\\
&\epsilon^1; \qquad 2x_0x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1/(2x_0) = \pm 1/2\\
&\epsilon^2; \qquad x_1^2 + 2x_0x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = x_1^2/(2x_0) = \mp 1/8\\
&\cdots \qquad \cdots
\end{aligned} \tag{4}$$

دو جواب به دست می‌آید:

$$x = \pm(1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{8} + \cdots), \tag{5}$$

که همان جوابِ معادله‌یِ (1) است که از بسطِ جوابِ دقیق به دست آورده بودیم. ϵ را 0.01 بگیریم. $x^2 = 1.01$ و جذرِ آن تا هشت رقمِ اعشار $x = 1.0049875$ می‌شود. با استفاده از روشِ اختلال و فقط تا مرتبه‌یِ دومِ ϵ به همین جواب می‌توان رسید.

مثالِ ۲— مثالِ دیگری را در نظر بگیریم.

$$x^2 - (3 + 2\epsilon)x + 2 + \epsilon = 0. \tag{6}$$

در حدِّ $\epsilon = 0$ جواب‌هایِ این معادله $x_0 = 1, 2$ است. بسطِ (2) برایِ x را در معادله‌یِ (6) جاگذاری می‌کنیم. ضرایبِ توان‌هایِ مختلفِ ϵ صفر هستند.

$$\begin{aligned}
&\epsilon^0; \qquad x_0^2 - 3x_0 + 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1, 2\\
&\epsilon^1; \qquad 2x_0x_1 - 3x_1 - 2x_0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{2x_0 - 1}{2x_0 - 3}\\
&\epsilon^2; \qquad x_1^2 + 2x_0x_2 - 3x_2 - 2x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{2x_1 - x_1^2}{2x_0 - 3}\\
&\cdots \qquad \cdots
\end{aligned} \tag{7}$$

از این‌جا دو جوابِ معادله‌یِ (6) به دست می‌آیند:

$$x \quad = \quad 1 - \epsilon + 3\epsilon^2 + \cdots$$

$$x \quad = \quad 2+3\epsilon-3\epsilon^2+\cdots \tag{8}$$

در مثال‌هایِ قبلی با اضافه شدنِ جمله‌یِ اختلال درجه‌یِ معادله و بنا بر این تعدادِ جواب‌ها عوض نمی‌شد. اما اگر با اضافه شدنِ جمله‌یِ اختلال درجه‌یِ معادله بالا رود برایِ $\epsilon \neq 0$ ممکن است جواب‌هایی به دست آید که در حدِّ $\epsilon = 0$ نداشتیم.

مثالِ ۳— معادله‌یِ

$$\epsilon x^2+x-1=0. \tag{9}$$

به ازایِ $\epsilon = 0$ این معادله درجه‌یِ یک است در حالی که برایِ $\epsilon \neq 0$ درجه‌یِ دو می‌شود. تنها جوابِ این معادله در حدِّ $\epsilon = 0$، $x_0 = 1$ است. بسطِ (2) برایِ x را در معادله‌یِ (9) جاگذاری می‌کنیم.

$$\epsilon(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2x_2+\cdots)^2+(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2x_2+\cdots)-1=0. \tag{10}$$

همه‌یِ ضرایبِ ϵ در رابطه‌یِ بالا صفر هستند.

$$\begin{array}{lll}
\epsilon^0; & x_0-1=0 & \Rightarrow \quad x_0=1\\
\epsilon^1; & x_1+x_0^2=0 & \Rightarrow \quad x_1=-1\\
\epsilon^2; & 2x_0x_1+x_2=0 & \Rightarrow \quad x_2=2\\
\cdots & \cdots &
\end{array} \tag{11}$$

معادله‌یِ (9) دو جواب دارد، اما با این روش تنها یک جواب را به دست می‌آوریم. نتیجه‌ای که می‌توانیم بگیریم این است که با جاگذاری بسطِ تیلورِ (2) تنها همان جوابی را که در حدِّ $\epsilon = 0$ داشتیم می‌توانیم به دست آوریم. به زبانِ دیگر هر گاه با اضافه شدنِ اختلال درجه‌یِ معادله بالا برود ممکن است معادله جواب‌هایِ دیگری داشته باشد اما این جواب‌هایِ اضافیِ احتمالی را نمی‌توان به صورتِ بسطِ تیلور بر حسبِ ϵ نوشت. به اختلال‌هایی از این نوع اختلالِ تکین می‌گویند. بیایید بسطِ

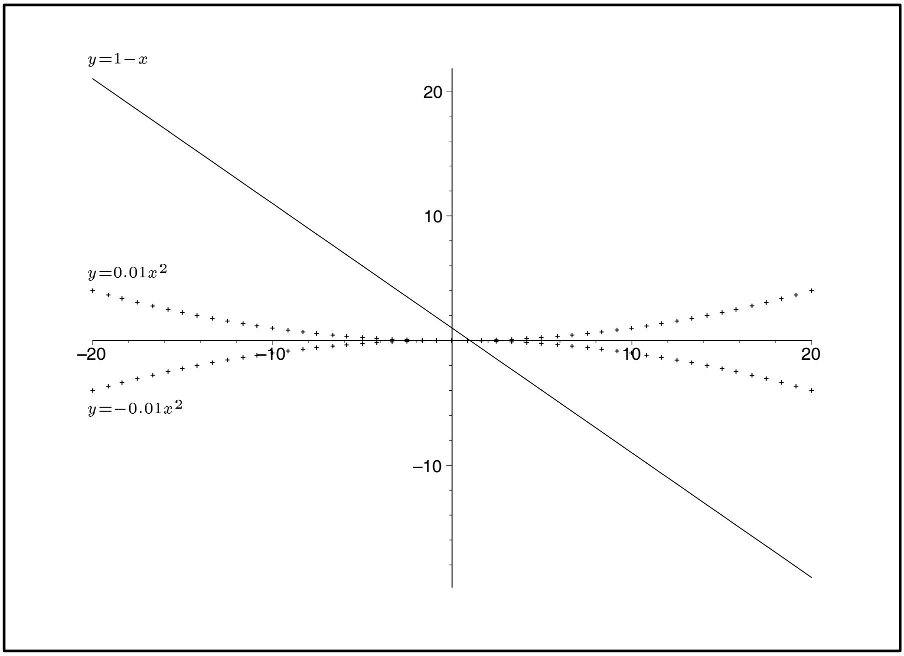
$$x=\epsilon^\alpha(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2x_2+\cdots). \tag{12}$$

را برایِ x در نظر بگیریم. می‌توانیم X را نیز به صورتِ زیر تعریف کنیم.

$$X:=x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2x_2+\cdots. \tag{13}$$

در این صورت $x=\epsilon^\alpha X$.

$$\epsilon^{2\alpha+1}(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2x_2+\cdots)^2+\epsilon^\alpha(x_0+\epsilon x_1+\epsilon^2x_2+\cdots)-1=0. \tag{14}$$



شکل ۱:

کوچک‌ترین توانِ ϵ در پرانتزِ اول $2\alpha+1$ و در پرانتزِ دوم α است. $\alpha=0$ همانی است که قبلاً به دست آورده‌ایم. در آن مورد کوچکترین توانِ ϵ در پرانتزِ دومِ رابطه‌ي (10) از مرتبه‌ي جمله‌ي آخر یعنی از مرتبه‌ي ϵ^0 است. حالتِ دیگر آن است که جمله‌ي اول و دومِ رابطه‌ي (9) هم‌مرتبه باشند، یعنی آن که کوچک‌ترین توانِ ϵ در پرانتزِ اول با کوچک‌ترین توانِ ϵ در پرانتزِ دومِ رابطه‌ي (14) هم‌مرتبه باشند.

$$2\alpha+1=\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=-1. \tag{15}$$

در این صورت X برحسبِ ϵ بسطِ تیلور ولی x برحسبِ ϵ بسطِ لوران[1] خواهد داشت. بسطِ لوران بسطی شبیهِ بسطِ تیلور است با این تفاوت که در بسطِ لوران توان‌هايِ صحیح منفی از متغیرِ بسط نیز ظاهر می‌شوند. چنین بسطی برايِ x منجر به جوابِ زیر می‌شود.

$$x=-\frac{1}{\epsilon}-1+\epsilon+\cdots \tag{16}$$

در حدِّ $\epsilon \ll 1$ معادله‌ي (9) دو جواب دارد که یکی در نزدیکيِ 1 است. اندازه‌ي جوابِ دیگر خیلی بزرگ است.

برايِ به دست آورنِ جواب کافی است که محلِ تقاطعِ سهميِ $y=\epsilon x^2$ و خطِ $y=1-x$ را به دست آوریم. برايِ $\epsilon=0.01$ این جواب حدودِ 101- است. با کوچک شدنِ ϵ، تقعرِ سهمی کم‌تر می‌شود

و نقطه‌ی تقاطعِ آن با خطِ $y = 1 - x$، یعنی جواب، به سمتِ $-\infty$ می‌رود. در $\epsilon = 0$ این جواب از بین می‌رود و با منفی شدنِ ϵ جواب از $+\infty$ شروع می‌کند به کوچک شدن. البته جوابِ دیگر به ازایِ $\epsilon \ll 1$، هم‌واره حول و حوشِ 1 باقی می‌ماند. در واقع با تغییرِ کوچکی در پارامترِ مسئله، یعنی ϵ، یکی از جواب‌هایِ معادله از مقدارِ $-\infty$ به $+\infty$ تغییر می‌کند.

مثال‌هایی در فیزیک وجود دارند که در آن‌ها پدیده‌یِ مشابهی رخ می‌دهد، مثلاً پدیده‌یِ تبخیر. با تغییرِ پارامترِ دما به مقدارِ خیلی کوچک چگالی تغییرِ بسیار بزرگی (مثلاً برایِ آب تا 1000 برابر) دارد.

فرض کنید خودمان را به چندجمله‌ای‌هایی با ضرایبِ حقیقی محدود کنیم. مثلاً

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{17}$$

را در نظر بگیرید. a، b، و c اعدادِ ثابتِ حقیقی هستند. این معادله دو جواب دارد که ممکن است هر دو حقیقی و یا هر دو مختلط باشند. با مزدوجِ مختلط کردنِ معادله‌یِ (17) به معادله‌یِ زیر می‌رسیم.

$$a\bar{x}^2 + b\bar{x} + c = 0. \tag{18}$$

بنا بر این $\bar{x}$ در همان معادله‌ای صدق می‌کند که x صدق می‌کرد. پس جواب‌هایِ معادله‌یِ (17) یا هر دو حقیقی‌اَند و یا اگر یکی مختلط بود جوابِ دوم هم مختلط است ولی مزدوجِ مختلطِ جوابِ اول. فرض کنید به ازایِ مقادیرِ خاصی از a جواب‌هایِ معادله‌یِ (17) حقیقی باشند با تغییرِ a ممکن است جواب‌هایِ معادله‌یِ (17) دیگری حقیقی نمانند. در آن صورت جواب‌هایِ معادله مزدوجِ مختلطِ هم هستند. گاهی اوقات با اضافه شدنِ جمله‌یِ اختلال درجه‌یِ معادله تغییری نمی‌کند ولی تعدادِ جواب‌هایِ معادله کم می‌شود. منظور تعدادِ جواب‌هایِ حقیقیِ معادله است. اگر خودِمان را به جواب‌هایِ حقیقی محدود نکنیم، تعدادِ جواب‌ها عوض نمی‌شود، بلکه با تغییرِ پارامترِ اختلال بعضی از جواب‌ها از محورِ حقیقی جدا شده و به صفحه‌یِ مختلط می‌روند. فرض کنید به ازایِ مقداری از پارامترِ اختلال جواب‌ها حقیقی باشند. با تغییرِ پارامترِ اختلال ممکن است جواب‌های حقیقی به هم نزدیک شده و وقتی جواب‌ها تبه‌گن شدند، مثلاً دوتایی (یا هر عددِ زوجِ دیگری)، به صورت جواب‌هایِ مزدوجِ مختلط به صفحه‌یِ مختلط بروند.

مثالِ ۴— معادله‌یِ $x^2 + \epsilon = 0$ به ازایِ $\epsilon = 0$ یک جوابِ صفرِ دوگانه دارد. اگر ϵ به تدریج منفی شود، جواب‌های تبه‌گن رویِ محورِ حقیقی از هم جدا می‌شوند. اگر ϵ را دوباره به تدریج به سمتِ صفر ببریم این دوجواب حقیقی به هم نزدیک می‌شوند، تا در $\epsilon = 0$ جواب‌ها تبه‌گن شوند. با مثبت شدنِ ϵ این دو جواب به صورتِ دو جوابِ مزدوجِ مختلطِ $\pm i\sqrt{\epsilon}$ در می‌آیند.

در ابتدا که اختلال را تعریف کردیم، گفتیم که جمله‌یِ اختلال باید جمله‌یِ کوچکی باشد. اما سئوالی ممکن است مطرح شود: چه‌قدر کوچک؟

مثالِ ۵— معادله‌یِ زیر

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-20)+\epsilon x^{19}=0, \tag{19}$$

معادله‌ي ويلکينسون[2] است. به ازاي $\epsilon=0$ جواب‌هاي اين معادله اعدادِ صحيحِ 1 تا 20 است. ببينيم ϵ چه‌قدر کوچک باشد تا بتوانيم از روشِ عاديِ اختلال استفاده کنيم. چون مرتبه‌ي چند جمله‌اي عوض نمي‌شود اختلال تکين نيست. بياييد ببينيم جوابِ $x_0=k$ (مثلاً $x_0=16$) چه‌قدر عوض مي‌شود. بسطِ زير را در نظر بگيريد،

$$x=k+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\cdots. \tag{20}$$

اين بسط را در معادله‌ي (19) جاگذاري مي‌کنيم.

$$(k-1+\epsilon x_1+\cdots)(k-2+\epsilon x_1+\cdots)\cdots+\epsilon(k+\epsilon x_1+\epsilon^2 x_2+\cdots)^{19}=0 \tag{21}$$

ضرايبِ مختلفِ ϵ صفراَند. مثلاً براي مرتبه‌هاي اول و دومِ ϵ به روابطِ زير مي‌رسيم:

$$\begin{aligned}
&(-1)^k x_1[(k-1)!\ (20-k)!]+k^{19}=0\\
&(-1)^k x_2[(k-1)!\ (20-k)!]+(-1)^k x_1^2[(k-1)!\ (20-k)!]\sum_{n=1,n\neq k}^{20}(\frac{1}{k-n})\\
&+19x_1k^{18}=0
\end{aligned} \tag{22}$$

جوابِ $x_0=k$ تا مرتبه‌ي اول به اندازه‌ي

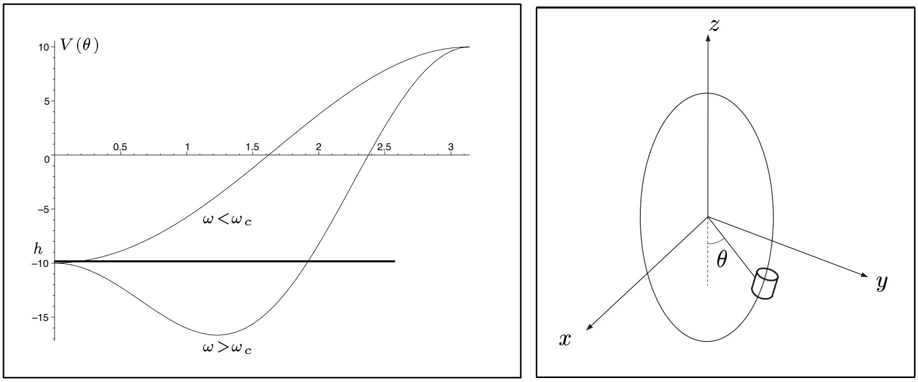
$$x=k+(-1)^{k+1}\frac{k^{19}}{(k-1)!\ (20-k)!}\epsilon+\cdots \tag{23}$$

تغيير مي‌کند. براي $k=16$

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{16^{19}}{15!4!}\approx -0.24\times 10^{10},\\
x_2 &\approx 10^{18}.
\end{aligned} \tag{24}$$

بنا بر اين حتي براي $\epsilon=10^{-9}$ هم روشِ اختلال جواب‌هاي خوبي نمي‌دهد. اگر مسئله را دقيق‌تر بررسي کنيم به ازاي $\epsilon=10^{-9}$ بعضي از جواب‌ها، مثلاً 1 و 2 تغييرِ چنداني نمي‌کنند ولي ديگر جوابي رويِ محورِ حقيقي و حول و حوشِ 16 وجود ندارد. اين جواب با جوابِ 15 به صورتِ يک زوج جوابِ مزدوجِ مختلط در آمده‌اند. در صورتي که ϵ کوچک‌تر باشد همه‌ي جواب‌ها را مي‌توان از روشِ اختلال در آورد.

تا اين‌جا چند مثال در موردِ معادله‌هاي جبري زديم. بياييد با استفاده از روشِ اختلال يک مسئله‌ي خاص در مکانيک را بررسي کنيم.



ب)　　　　　　　　　　　　　　　　الف)

شکل ۲: الف) مهره مقید است روی حلقه باشد، و حلقه به دورِ محورِ قائم می‌چرخد. ب) پتانسیل، $V(\theta)$، بر حسبِ θ

مثالِ ٦– حلقه‌ای صلب به شعاعِ R را با سرعتِ زاویه‌ایِ ثابتِ ω می‌چرخانیم (شکلِ 2 را ببینید). دانه‌یِ تسبیحی را از این حلقه رد کرده‌ایم.

h که با رابطه‌یِ زیر تعریف می‌شود، ثابتِ‌حرکت است.

$$\begin{aligned} h &:= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + V(\theta) \\ V(\theta) &:= -\frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\theta - mgR\cos\theta. \end{aligned} \tag{25}$$

شکلِ $V(\theta)$ بستگی به مقدارِ ω دارد. تعریف می‌کنیم $\omega_c := \sqrt{g/R}$. اگر $\omega < \omega_c$ باشد نقاطِ $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ نقاطِ تعادل هستند که اولی تعادلِ پایدار و دومی تعادلِ ناپایدار است. در صورتی که $\omega > \omega_c$ باشد سه نقطه‌یِ تعادل وجود دارد. در نقاطِ $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ تعادل ناپایدار و در $\theta = \cos^{-1}(\omega_c/\omega)$ تعادل پایدار است. در این‌جا تعدادِ نقاطِ تعادل به طورِ ناپیوسته تغییر می‌کند.

$$h =: -mgR(1-\epsilon) \tag{26}$$

می‌خواهیم نقاطِ بازگشت را به دست آوریم. از شکل هم پیداست که برایِ $\omega < \omega_c$، این زاویه نزدیکِ صفر و برایِ $\omega > \omega_c$ جوابی محدود و دور از صفر دارد. با تعریفِ $\lambda := (\omega/\omega_c)^2$ معادله‌یِ $h = V(\theta)$ به صورتِ زیر در می‌آید.

$$2\lambda(1-\epsilon) = \sin^2\theta + 2\lambda\cos\theta. \tag{27}$$

بسطی به صورتِ زیر برایِ θ در نظر می‌گیریم،

$$\theta = \theta_0 + \epsilon\theta_1 + \epsilon^2\theta_2 + \cdots. \tag{28}$$

با استفاده از

$$\begin{aligned}\sin(\theta_0+\epsilon\theta_1) &\approx \sin\theta_0+\epsilon\theta_1\cos\theta_0\\ \cos(\theta_0+\epsilon\theta_1) &\approx \cos\theta_0-\epsilon\theta_1\sin\theta_0.\end{aligned} \tag{29}$$

و جاگذاری در رابطه‌ي (25) از صفر قرار دادنِ ضرایبِ ϵ^0 و ϵ^1 به روابطِ زیر می‌رسیم،

$$\begin{aligned}\sin^2\theta_0+2\lambda\cos\theta_0 &= 2\lambda\\ 2\theta_1\sin\theta_0\cos\theta_0-2\theta_1\lambda\sin\theta_0 &= -2\lambda.\end{aligned} \tag{30}$$

به سادگی می‌توان دید که برایِ $\lambda < 1$، θ_0 دو جواب دارد. یکی $\cos\theta_0 = 1$ و دیگری $\cos\theta_0 = 2\lambda - 1$. ولی برایِ $\lambda > 1$، $\cos\theta_0 = 1$ تنها جواب است. به ازایِ $\cos\theta_0 = 1$ معادله‌يِ دومِ (30) ، برایِ θ_1 جوابی ندارد. پس بسطِ تیلورِ (28) برایِ $\lambda > 1$ جوابِ خوبی نیست. برایِ این حالت، از شکل هم پیداست که θ باید خیلی کوچک باشد. برایِ θ یِ کوچک (27) به صورتِ زیر در می‌آید،

$$2\lambda(1-\epsilon)=\theta^2+2\lambda(1-\frac{\theta^2}{2}) \quad\Rightarrow\quad \theta=\sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda-1}}\epsilon^{1/2}=\mathcal{O}(\epsilon^{1/2}). \tag{31}$$

بنا بر این برایِ $\lambda > 1$ بسطِ θ بر حسبِ ϵ بسطِ تیلور نیست و از $\epsilon^{1/2}$ شروع می‌شود. در این جا از نماد $\mathcal{O}$ استفاده کرده ایم. گاهی اوقات به جایِ آن که گفته شود در حدِ $\epsilon \to 0$ تابعِ $\sin\epsilon$ از مرتبه‌يِ ϵ است نوشته می‌شود

$$\sin\epsilon=\mathcal{O}(\epsilon), \qquad \epsilon\to 0. \tag{32}$$

معنيِ دقیقِ این نماد این است: می‌گوییم $f(\epsilon)=\mathcal{O}\left[g(\epsilon)\right]$، اگر

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(\epsilon)}{g(\epsilon)}=A, \qquad 0<|A|<\infty. \tag{33}$$

البته همان‌طور که دیدیم همیشه هم جواب یک بسطِ چندجمله‌ای بر حسبِ ϵ نیست.

مثالِ ۷— معادله‌يِ زیر را در نظر بگیرید.

$$x^2-2\epsilon x-\epsilon=0. \tag{34}$$

با جاگذاریِ بسطِ (2) نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned}&\epsilon^0; \qquad x_0^2=0\\ &\epsilon^1; \qquad 2x_0x_1=2x_0.\end{aligned} \tag{35}$$

از این معادلات x را نمی‌توان به دست آورد. بیایید از بسطِ توانیِ زیر برایِ x استفاده کنیم.

$$x = \epsilon^{\alpha} x_0 + \epsilon^{\beta} x_1 + \epsilon^{\gamma} x_2 + \cdots, \quad \alpha < \beta < \gamma < \cdots \tag{36}$$

$x_0 \neq 0$ می‌گیریم، در واقع ضریبِ اولین جمله‌یِ غیرِصفرِ در بسطِ بر حسبِ ϵ را x_0 می‌گیریم. در این صورت داریم

$$(\epsilon^{\alpha} x_0 + \epsilon^{\beta} x_1 + \epsilon^{\gamma} x_2 + \cdots)^2 - 2\epsilon(\epsilon^{\alpha} x_0 + \epsilon^{\beta} x_1 + \epsilon^{\gamma} x_2 + \cdots) - \epsilon = 0 \tag{37}$$

کوچک‌ترینِ توانِ ϵ در پرانتزِ اول $\epsilon^{2\alpha}$ و در پرانتزِ دوم $\epsilon^{\alpha+1}$ و جمله‌یِ آخر ϵ است. دستِ‌کم یکی از جملاتِ پرانتزهایِ اول و دوم باید از مرتبه‌یِ ϵ باشد. اگر $2\alpha < \alpha + 1$ (یعنی $\alpha < 1$) باشد، اولین جمله‌یِ پرانتزِ اول از مرتبه‌یِ ϵ است. در این صورت $\alpha = 1/2$. اگر $2\alpha > \alpha + 1$ (یعنی $\alpha > 1$) باشد، اولین جمله‌یِ پرانتزِ دوم از مرتبه‌یِ ϵ است. در این صورت $\alpha = 0$ که با $\alpha > 1$ سازگار نیست. البته ممکن است کوچک‌ترین توانِ پرانتزهایِ اول و دوم هم‌رتبه باشند و در ضمن رتبه‌یِ این جملات از یک که رتبه‌یِ ϵ در جمله‌یِ آخر است کوچک‌تر باشد. در این صورت $2\alpha = \alpha + 1 < 1$ می‌شود که جواب ندارد. پس $\alpha = 1/2$.

$$x = \epsilon^{1/2} x_0 + \epsilon^{\beta} x_1 + \epsilon^{\gamma} x_2 + \cdots. \tag{38}$$

با جاگذاریِ این بسط در (34) نتیجه می‌شود،

$$\begin{aligned} &x_0^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = 1 \\ &2\epsilon^{\beta+1/2} x_0 x_1 - 2\epsilon^{3/2} x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad \beta = 1. \end{aligned} \tag{39}$$

جوابِ معادله‌یِ (34) خواهد شد،

$$x = \pm\epsilon^{1/2} + \epsilon. \tag{40}$$

معادله‌یِ (34) را دقیق هم می‌شود حل کرد و جوابِ آن عبارت است از

$$x = \epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 + \epsilon} \approx \pm\epsilon^{1/2} + \epsilon \pm \frac{1}{2}\epsilon^{3/2}. \tag{41}$$

گاهی با مسائلی روبه‌رو می‌شویم که علاوه بر پارامترِ کوچکِ ϵ پارامترهایِ دیگری نیز در مسئله وجود دارد. برایِ مقادیری از این پارامترها یک بسط و برایِ مقادیرِ دیگری از پارامترها بسطِ دیگری از ϵ جوابِ مسئله است.

مثالِ ۸— معادله‌یِ زیر را در نظر بگیرید.

$$(x-1)(x-\tau) = -\epsilon x. \tag{42}$$

با فرضِ این که جواب بسطِ تیلوری از ϵ باشد به جوابِ زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} x &= \tau + \frac{\epsilon\tau}{1-\tau} + \frac{\epsilon^2\tau}{(1-\tau)^3} + \cdots \\ x &= 1 - \frac{\epsilon}{1-\tau} - \frac{\epsilon^2\tau}{(1-\tau)^3} + \cdots \end{aligned} \tag{43}$$

البته این جواب‌ها در حدِّ $\tau \to 1$ به درد نمی‌خورند. اگر τ آن‌قدر به 1 نزدیک شودکه جملاتِ مختلف هم‌مرتبه شوند این بسط را باید کنار گذاشت. مثلاً اگر جمله‌هایِ دوم و سوم هم مرتبه باشند

$$\frac{\epsilon\tau}{1-\tau} = \mathcal{O}(\frac{\epsilon^2\tau}{(1-\tau)^3}), \quad \Rightarrow \quad 1-\tau = \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}) \tag{44}$$

با تعریفِ $1-\tau =: \sigma\epsilon^{1/2}$ رابطه‌یِ (42) به صورتِ زیر در می‌آید.

$$(x-1)(x-1+\epsilon^{1/2}\sigma) = -\epsilon x. \tag{45}$$

x جوابِ این معادله را می‌توان به صورتِ بسطِ تیلوری از $\epsilon^{1/2}$ نوشت.

$$x = 1 - \frac{\epsilon^{1/2}}{2}(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2-4}) + \cdots \tag{46}$$

2 معادله‌هایِ دیفرانسیل

معادلاتِ دیفرانسیلی را نیز مشابهِ معادله‌هایِ جبری گاهی می‌توان به روشِ اختلالی حل کرد.

مثالِ ۹— بیایید سقوطِ آزادِ ذره‌ای به جرمِ m در حضورِ مقاومتِ هوا را بررسی کنیم. فرض کنید نیرویِ مقاومتِ هوا متناسب با سرعت باشد. اگر مقاومتِ هوا کوچک باشد می‌توان مسئله را به روشِ اختلال حل کرد. بیایید اول معنیِ کوچک بودنِ مقاومت هوا را روشن کنیم. معادله‌یِ نیوتن و شرطِ اولیه برایِ چنین ذره‌ای هست:

$$m\ddot{x} = mg - bv, \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \tag{47}$$

مقاومتِ هوایِ کوچک یعنی این که $|bv| \ll mg$ یا $|v| \ll mg/b$. بنا بر این همواره به ازایِ هر b ای می‌توان سرعتی پیدا کرد که چنین شرطی را برآورده کند. $\epsilon := b/m$ می‌گیریم. ϵ بُعددار است پس در بسطِ

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + \cdots, \tag{48}$$

x_1، x_2 و $\cdots$ بُعدِ طول ندارند. با جاگذاریِ این بسط در معادله‌یِ نیوتن و شرط‌هایِ اولیه

$$
\begin{aligned}
&(\ddot{x}_0 + \epsilon\ddot{x}_1 + \epsilon^2\ddot{x}_2 + \cdots) = g - \epsilon(\dot{x}_0 + \epsilon\dot{x}_1 + \epsilon^2\dot{x}_2 + \cdots) \\
&\dot{x}_0(0) + \epsilon\dot{x}_1(0) + \epsilon^2\dot{x}_2(0) + \cdots = v_0 \\
&x_0(0) + \epsilon x_1(0) + \epsilon^2 x_2(0) + \cdots = 0,
\end{aligned} \tag{49}
$$

نتیجه می‌شود

$$
\begin{array}{llll}
\epsilon^0; & \ddot{x}_0 = g & \dot{x}_0(0) = v_0, & x_0(0) = 0 \\
\epsilon^1; & \ddot{x}_1 = -\dot{x}_0 & \dot{x}_1(0) = 0, & x_1(0) = 0 \\
\epsilon^2; & \ddot{x}_2 = -\dot{x}_1 & \dot{x}_1(0) = 0, & x_2(0) = 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots &
\end{array} \tag{50}
$$

با حلِ این معادله‌ها $x(t)$ به دست می‌آید.

$$
x(t) = v_0 t + \frac{gt^2}{2} - \frac{bgt^3}{6m} - \frac{bv_0t^2}{2m} + \frac{b^2gt^4}{24m^2} + \frac{b^2v_0t^3}{6m^2} + \cdots \tag{51}
$$

معادله‌یِ (47) را می‌شود دقیق هم حل کرد.

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \frac{mg}{b} - (\frac{mg}{b} - v_0)\mathrm{e}^{-bt/m} \\
x(t) &= \frac{mgt}{b} + \frac{m}{b}(\frac{mg}{b} - v_0)(\mathrm{e}^{-bt/m} - 1).
\end{aligned} \tag{52}
$$

اگر این جواب را بر حسبِ b/m بسط دهیم به همان جوابی که از روشِ اختلال به دست آوردیم، می‌رسیم.

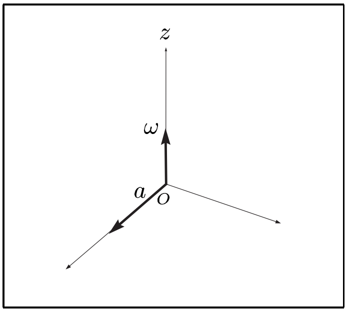
ما تا این‌جا برایِ استفاده از روشِ اختلال بسطی که برایِ جواب حدس می‌زدیم را در معادله جاگذاری می‌کردیم و ضرایبِ توان‌هایِ مختلفِ ϵ را صفر می‌گذاشتیم. یک راهِ معادل این است که جمله‌یِ اختلال را مثلاً به سمتِ راستِ معادله ببریم. فرض کنید جمله‌یِ اختلال بسطِ تیلوری بر حسبِ ϵ و x داشته باشد.

$$
f(x) = \epsilon g_1(x) + \epsilon^2 g_2(x) + \cdots \tag{53}
$$

با صفر گذاشتنِ جمله‌یِ اختلال جوابِ مرتبه‌یِ صفر به دست می‌آید.

$$
f(x_0) = 0. \tag{54}
$$

اگر جمله‌یِ مرتبه‌یِ صفر را در سمتِ راست جاگذاری کنیم معادله‌ای به دست می‌آید که می‌توانیم از آن جوابِ مرتبه‌یِ یک را به دست آوریم.



شکل ۳:

$$f(x_0 + \epsilon x_1) = \epsilon g_1(x + \epsilon x_1) + \epsilon^2 g_2(x + \epsilon x_1) + \cdots \tag{55}$$

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، می‌توانیم با داشتنِ جوابِ مرتبه‌يِ k می‌توانیم جوابِ مرتبهِ $k+1$ را به دست آوریم. به این روش، روشِ تکرار می‌گویند.

مثالِ ۱۰ — صفحه‌يِ بزرگی حولِ محورِ z که بر صفحه عمود است و از نقطه‌يِ O می‌گذرد، با سرعتِ زاویه‌ايِ ثابتِ ω دوران می‌کند. جسمِ کوچکی به جرمِ m را رويِ این سطح و در فاصله‌يِ a از نقطه‌يِ O قرار می دهیم. ضریبِ اصطکاکِ ذره با صفحه μ است. بردارِ مکانِ ذره را تا مرتبه‌يِ دومِ μ به دست آورید. تا این مرتبه جسم به مبدأ نزدیک می‌شود و یا از آن دور می‌شود؟

اندازه‌يِ نیرويِ اصطکاک μmg و جهتِ آن عکسِ جهتِ سرعتِ نسبيِ جسم نسبت به صفحه است. سرعتِ نسبيِ جسم نسبت به صفحه $\mathbf{v} - \omega \times \mathbf{r}$ است. بنا بر این نیرويِ اصطکاک عبارت است از

$$\mathbf{f} = -\mu mg \frac{\mathbf{v} - \omega \times \mathbf{r}}{|\mathbf{v} - \omega \times \mathbf{r}|}. \tag{56}$$

شتابِ جسم نیز عبارت است از

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\mu g \frac{\mathbf{v} - \omega \times \mathbf{r}}{|\mathbf{v} - \omega \times \mathbf{r}|}. \tag{57}$$

شرایطِ اولیه نیز $\mathbf{r}(0) = \hat{\mathbf{i}}a$ و $\mathbf{v}(0) = 0$ است. چون سمتِ راستِ رابطه‌يِ بالا یک ضریبِ μ دارد برايِ آن که سرعت را تا مرتبه‌يِ اول به دست آوریم کافی است که سمتِ راست رابطه‌يِ بالا را تا مرتبه‌يِ صفرم قرار دهیم. در این صورت

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_1}{\mathrm{d}t} = \mu g \frac{\omega \times \hat{\mathbf{i}}a}{|\omega \times \hat{\mathbf{i}}a|}. \tag{58}$$

از حل این معادله می توان سرعت تا مرتبه‌يِ اول، $\mathbf{v}_1$، و مکان تا مرتبه‌يِ اول، $\mathbf{r}_1$، به دست آورد.

$$\mathbf{v}_1 = \mu g t \hat{\mathbf{j}}, \quad \mathbf{r}_1 = a\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}\mu g t^2 \hat{\mathbf{j}}. \tag{59}$$

به همین ترتیب با جای‌گذاری مقادیرِ مکان و سرعت تا مرتبه‌یِ اول می‌توان سرعت و مکان را تا مرتبه‌یِ دوم به دست آورد.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t} = \mu g \frac{(\omega a - \mu g t)\hat{\mathbf{j}} - 1/2\ \mu g t^2 \omega \hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{(\omega a - \mu g t)^2 + 1/4\ \mu^2 g^2 t^4 \omega^2}}. \tag{60}$$

چون صورتِ کسر ضریبِ μ دارد و ما می‌خواهیم نتیجه تا مرتبه‌یِ دوم درست باشد کافی است مخرجِ کسر را تا مرتبه‌یِ اول نگه داریم. با صرفِ نظر از جمله‌هایِ بالاتر از مرتبه‌ی دو داریم.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_2}{\mathrm{d}t} = \mu g \left[\frac{(\omega a - \mu g t)\hat{\mathbf{j}}}{(\omega a - \mu g t)} - \frac{1/2\ \mu g t^2 \omega \hat{\mathbf{i}}}{\omega a}\right]. \tag{61}$$

در جمله‌یِ آخر چون μ^2 داریم کافی است مخرج را تا مرتبه‌یِ صفرم نگه داریم. پس از ساده کردن و انتگرال‌گیری، سرعت و مکان تا مرتبه‌یِ دوم به دست می‌آید.

$$\mathbf{v}_2 = \mu g t \hat{\mathbf{j}} - \frac{\mu^2 g^2 t^3}{6a}\hat{\mathbf{i}}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}\mu g t^2 \hat{\mathbf{j}} + (a - \frac{\mu^2 g^2 t^4}{24a})\hat{\mathbf{i}}. \tag{62}$$

فاصله‌یِ ذره تا مبدأ تا مرتبه‌یِ دومِ μ عبارت است از

$$r_2 = \sqrt{\frac{1}{6}\mu^2 g^2 t^4 + a^2}\ > a \tag{63}$$

پس ذره تا این مرتبه از مبدأ دور می‌شود.

فرض کنید تابعِ $V(x)$ در نقطه‌یِ x_0 کمینه است. اگر $V(x)$ را حولِ نقطه‌یِ x_0 بسط دهیم.

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 V''(x_0) + \frac{1}{3!}(x - x_0)^3 V'''(x_0) + \cdots \tag{64}$$

برایِ سادگی مبدأِ مختصات را در x_0 می‌گذاریم. در این جا خودمان را به حالتی که جمله‌یِ مرتبه‌یِ دو بر حسبِ x غیرِصفر است محدود می‌کنیم. در صورتی که x به اندازه‌یِ کافی به 0 نزدیک باشد می‌توان از جمله‌هایِ مرتبه‌یِ دوم به بالا صرفِ نظر کرد. فرض کنید که $V(x)$ تابع پتانسیل برایِ نیرویی باشد، مسئله تبدیل به مسئله‌یِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگ می‌شود و نیرو عبارت است از

$$m\ddot{x} = -kx, \qquad k > 0. \tag{65}$$

در تقریبِ بعدی می‌توانیم جمله‌هایِ بعدی را نگه داریم. فرض کنید جمله‌یِ مرتبه‌یِ دوم صفر باشد.

$$m\ddot{x} = -kx + \beta x^3. \tag{66}$$

این معادله، معادله‌یِ حرکتِ یک نوسانگرِ غیرِهم‌آهنگ است. هر چند حرکت دوره‌ای است ولی هم‌آهنگ نیست.

مثالِ ۱۱— نوسان‌گرِ غیرِهم‌آهنگی را در نظر بگیرید.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon x^3. \tag{67}$$

در مرتبه‌ي صفرمِ ϵ،

$$x_0(t) = A\cos\omega_0 t, \tag{68}$$

و در مرتبه‌ي بعدی

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = x_0^3 \tag{69}$$

انتظار داریم جوابِ مسئله دوره‌ای باشد، ولی طرفِ راستِ رابطه‌ي بالا متناظر با یک نیروي واداشته جمله‌ای با همان فرکانسِ طبیعيِ سیستم دارد. اتفاقی که می‌افتد این است که تشدید رخ می‌دهد، جواب بزرگ می‌شود و جواب دیگر دوره‌ای نیست. در واقع اگر جواب را با یک جوابِ هم‌آهنگ تقریب بزنیم می‌بینیم که جواب دوره‌ای نیست. اما می‌دانیم که جوابِ مسئله دوره‌ای است. در این‌جا نیز روشِ اختلالِ عادی جوابِ درست نمی‌دهد. در واقع نشان می‌دهیم که فرکانسِ طبیعيِ سیستم که مربوط به حرکتِ هم‌آهنگِ در مرتبه‌ي صفر است عوض می‌شود. به این‌کار بازبهنجارش گفته می‌شود. یعنی مسئله را می‌توان با یک نوسان‌گرِ هم‌آهنگ تقریب زد ولی با فرکانسی غیر از ω_0. بسطِ زیر را برايِ فرکانس در نظر بگیرید

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \epsilon\Omega_1. \tag{70}$$

با جاگذاريِ این بسط و بسطِ تا مرتبه‌ي اولِ x در (67) نتیجه می‌شود:

$$\ddot{x}_0 + \epsilon\ddot{x}_1 + +(\omega^2 + \epsilon\Omega_1)(x_0 + \epsilon x_1) = \epsilon(x_0 + \epsilon x_1)^3. \tag{71}$$

معادله‌هايِ حاکم بر x_0 و x_1 عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \epsilon^0; &\qquad \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \\ \epsilon^1; &\qquad \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 + \Omega_1 x_0 = x_0^3 \end{aligned} \tag{72}$$

x_0 حرکتش کماکان هم‌آهنگ است، ولی با فرکانسِ ω به‌جايِ فرکانسِ ω_0.

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -\Omega_1 A\cos\omega t + A^3\cos^3\omega t \\ &= A^3[-\frac{\Omega_1}{A^2}\cos(\omega t) + \frac{3}{4}\cos(\omega t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega t)]. \end{aligned} \tag{73}$$

برايِ آن که تشدید رخ ندهد و حرکت دوره‌ای بماند باید ضریبِ $\cos(\omega t)$ صفر باشد،

$$\Omega_1 = \frac{3}{4}A^2. \tag{74}$$

که با توجه به (70) می‌شود

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \frac{3}{4}\epsilon A^2. \tag{75}$$

دقت کنید که برایِ نوسان‌گرِ هم‌آهنگ فرکانس مستقل از دامنه است ولی برایِ نوسان‌گرِ غیرِهم‌آهنگ فرکانس به دامنه بستگی دارد.

در این‌جا با اضافه شدنِ اختلال نوسان‌گرِ هم‌آهنگی با فرکانسِ ω_0 به نوسان‌گری ناهم‌آهنگ تبدیل می‌شود. البته این نوسان‌گر یک حرکتِ دوره‌ای دارد و اگر بخواهیم آن را با یک نوسان‌گرِ هم‌آهنگ تقریب بزنیم، فرکانسِ آن نوسان‌گر ω است.

حرکتِ آونگ مثالی از نوسان‌گرِ غیرِهم‌آهنگ است. طولِ آونگ را l می‌گیریم. وقتی دامنه‌یِ حرکتِ آونگ آن‌قدر کم نباشد که بتوان از جمله‌یِ غیرِهم‌آهنگ صرفِ‌نظر کرد

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta \approx -\frac{g}{l}(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \cdots). \tag{76}$$

برایِ این آونگ $\epsilon = g/(6l)$. اگر دامنه حرکت را θ_0 بگیریم، فرکانسِ حرکت از رابطه‌یِ زیر به دست می‌آید.

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \epsilon\Omega_1 = \frac{g}{l}(1 - \frac{\theta_0^2}{8}). \tag{77}$$

قدردانی

از احمدِ شریعتی و محمّدِ خرّمی به خاطر پیش‌نهادهایِ مفیدشان سپاسگزاری می‌کنم.

مراجع

[1] Nayfeh, Ali. H.; *Introduction to Perturbation*; John Wiley & Sons,

[2] Bender, Carl. M., Orszag, Steven. A.; *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*; McGraw Hill,

نام‌هایِ خاص

1) Laurent, 2) Wilikinson