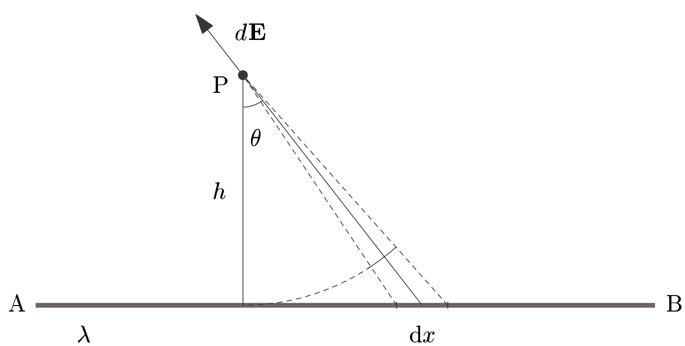
پتانسیلِ ناشی از یک میله‌یِ باردار با طولِ محدود

امیر آقامحمدی، روشن تورانی

در این مقاله پتانسیلِ ناشی از یک میله‌یِ باردار را به دست می‌آوریم. در ابتدا فرض می‌کنیم میله نارسانا است و یک‌نواخت باردار شده است. سپس پتانسیلِ یک میله‌یِ رسانایِ باردار را به دست می‌آوریم. خواهیم دید علی‌رغم انتظارِ احتمالی‌یِ اولیه، بار رویِ میله‌یِ رسانا در نوک‌هایِ آن جمع نمی‌شود بلکه رویِ میله به‌طورِ یک‌نواخت توزیع می‌شود.

۱ پتانسیلِ یک میله‌یِ نارسانا با بارِ یک‌نواخت

میله‌یِ نارسانایِ AB با چگالی‌یِ بارِ طولی‌یِ λ یک‌نواخت باردار شده است. ابتدا ثابت می‌کنیم که میدانِ الکتریکی‌یِ میله در نقطه‌ای مانندِ P در امتدادِ نیم‌سازِ زاویه‌یِ $\angle$APB است. برایِ این کار، ابتدا از P بر میله عمودی رسم می‌کنیم و طولِ این پاره‌خط را h می‌نامیم ــ شکلِ ۱ را ببینید. جزءِ کوچکی از میله به طول dx را در نظر می‌گیریم. پاره‌خطی که این جزء را به P وصل می‌کند با پاره‌خطِ عمود بر میله زاویه‌یِ θ می‌سازد.



شکلِ ۱: از P به پاره‌خطِ AB عمود کرده ایم.

داریم

$$|\mathrm{d}\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda\,\mathrm{d}x}{(h/\cos\theta)^2}, \tag{1}$$

و با توجه به شکل

$$x = h\,\tan\theta \quad \Rightarrow \mathrm{d}x = h\,\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta, \tag{2}$$

و با استفاده از این داریم،

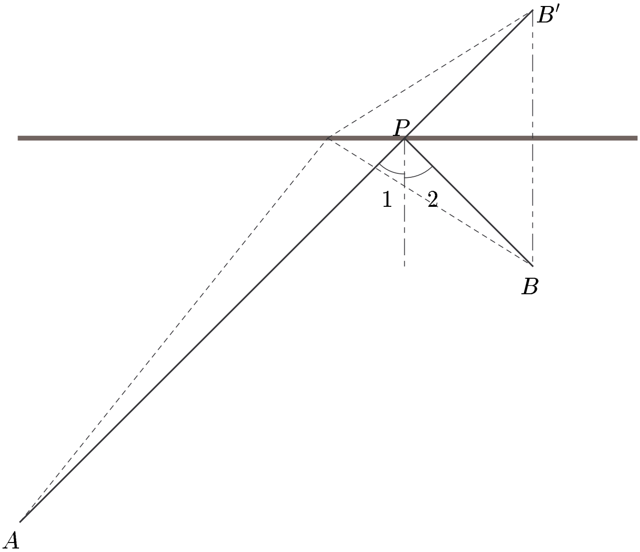
$$|\mathrm{d}\mathbf{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda h\sec^2\theta\ \mathrm{d}\theta}{(h/\cos\theta)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda(h\ \mathrm{d}\theta)}{h^2}, \tag{3}$$

که این عنصرِ میدانِ الکتریکی برابر با میدانِ ناشی از عنصری با همان چگالیِ بار روی کمانِ دایره‌ای به شعاعِ h است (شکلِ ۱ را ببینید). بنا بر این میدانِ الکتریکیِ میله‌ای که یک‌نواخت باردار شده در نقطه‌یِ P معادلِ میدانِ الکتریکیِ ناشی از کمانِ دایره‌ای به شعاعِ h، به مرکزِ P و زاویه‌یِ $\angle\mathrm{APB}$ است که با همان چگالیِ بار طولی یک‌نواخت باردار شده است. بنا به تقارن میدانِ کمانی از دایره در راستایِ نیم‌سازِ زاویه‌یِ کمان قرار می‌گیرد.

این میدان بر سطحِ هم‌پتانسیل در نقطه یِ P عمود است. توجه داریم که مسئله تقارنِ سمتی دارد (به دورِ میله). حالا می‌توان نشان داد که سطوحِ هم‌پتانسیل بیضی‌هایی دوّار هستند که کانون‌هایِ همگی‌یِ آن‌ها دو سرِ میله است. از دو سرِ میله یعنی A، B و نقطه‌یِ P می‌توان یک صفحه گذراند و مسئله را اصولاً دوبُعدی بررسی کرد. بیضی مکانِ هندسی‌یِ نقاطی است که مجموعِ فاصله‌شان از دو کانون مقداری ثابت است. می‌توان نشان داد که اگر از دو کانون به نقطه‌ای مثلِ P رویِ بیضی وصل کنیم مماسِ بر بیضی در این نقطه بر نیم‌سازِ زاویه‌ای که به این طریق ساخته می‌شود عمود است. این مطلب را به زبانِ نورِ هندسی نیز می‌شود گفت. کافی است ثابت کنیم که اگر از یکی از کانون‌هایِ بیضی به نقطه‌ای رویِ بیضی نوری تابیده شود و سطحِ داخلی‌یِ بیضی کاملاً صیقلی باشد نورِ بازتاب از کانونِ دیگرِ بیضی می‌گذرد. این که برایِ آئینه‌یِ تخت زاویه‌هایِ تابش و بازتاب برابرند از اصلِ فرما می‌آید. مطابقِ این اصل نور از A به B در مسیری حرکت می‌کند که زمانِ حرکت کمینه باشد. از این که سرعتِ نور ثابت است نتیجه می‌شود که نور از A به B در مسیری حرکت می‌کند که طولِ مسیرش کمینه باشد. اگر طولِ مسیر را s بگیریم، با جابه‌جا کردنِ P، s تغییر می‌کند. از اصلِ فرما نتیجه می‌شود که با تغییرِ P، تغییرِ مرتبه‌یِ اولِ s صفر است:

$$\mathrm{d}s\big|_P = 0 \tag{4}$$

تصویرِ B نسبت به آئینه را B' می‌گیریم. با استفاده از این که کوتاه‌ترین خط بینِ دو نقطه خطِ راست است، خطِ APB' (یا خطِ APB که هم‌اندازه‌اش است) کوتاه‌ترین خط است، و به سادگی می‌شود دید که زاویه‌هایِ 1 و 2 برابر اند.



شکلِ ۲: اصلِ فِرما در موردِ آینه‌یِ تخت می‌گوید که با تغییر ِ P رویِ آینه، تغییرِ مرتبه‌یِ اوّلِ کمیّتِ $AP + PB$ صفر است.

اگر نقطه‌ای مثلِ P رویِ بیضی بگیریم، طبقِ تعریف با جابه‌جا کردنِ آن $s := PA + PB$ ثابت می‌ماند یعنی رویِ بیضی $\mathrm{d}s = 0$ است. در نقطه‌یِ P مماس بر بیضی را رسم می‌کنیم. مثلِ این است که در نقطه‌یِ تماس یک آئینه‌یِ تخت گذاشته باشیم. می‌دانیم برایِ چنین حالتی زاویه‌یِ تابش با زاویه‌یِ بازتاب برابر است. پس خطِ عمود بر سطحِ بیضی در نقطه‌یِ P، نیم‌سازِ زاویه‌یِ بینِ خطوطِ واصل از کانون‌ها و P است. از این گفته و نتیجه‌یِ قسمتِ قبل و یکتاییِ جوابِ پتانسیل (و در نتیجه سطوحِ هم‌پتانسیل) نتیجه می‌شود سطوحِ هم‌پتانسیل بیضی‌هایی دوّار هستند که کانون‌هایِ آن‌ها نقاطِ A و B هستند.

بیایید فرض کنیم به جایِ یک میله‌یِ با طولِ محدود، میله‌ای داشته باشیم که طولش نامحدود باشد. این مسئله جزو اولین مثال‌هایی است که در درس‌هایِ الکترواستاتیک می‌بینیم. اصولاً مسئله‌یِ میدانِ الکتریکیِ میله‌ای با طولِ نامحدود غیرِ فیزیکی است. در واقع مسئله‌یِ فیزیکی میله‌ای با طولِ محدود است که می‌خواهیم پتانسل را در نقطه‌ای مثلِ P در نزدیکیِ میله و دور از دو سرِ آن بدانیم. در نزدیکیِ میله، یعنی آن‌قدر نزدیک که فاصله P تا میله خیلی کوچک‌تر از طولِ میله باشد و P نیز حوالیِ وسطِ میله است. در این حالت سطوحِ هم‌پتانسیل استوانه هستند. در واقع مثلِ این است که دو کانونِ بیضیِ دوّار را به بی‌نهایت ببریم.

حالا اگر بخواهیم پتانسیل را در نزدیکیِ یکی از دو سرِ میله به دست آوریم، مثلِ این است که در نزدیکیِ یکی از کانون‌ها باشیم و کانونِ دیگر را به بی‌نهایت ببریم. در این صورت انتظار داریم که

بیضیِ دوّار به سهمی‌یِ دوّار تبدیل شود. پس سطوحِ هم‌پتانسیلِ میله‌ای نامحدود که مثلاً یک‌سرش در مبدأ و سرِ دیگرش در بی‌نهایت باشد یک سهمی‌یِ دوّار است.

راستی اگر به جایِ یک میله دو میله داشته باشیم سطوحِ هم‌پتانسیل چه می‌شوند؟ دو میله‌یِ باردارِ یک‌سان با چگالی‌یِ بارِ طولی‌یِ یک‌نواخت در راستایِ یک خط، مثلاً محورِ x به طوری قرار دارند که اولی در ناحیه‌یِ $[a, \infty)$ و دیگری در ناحیه‌یِ $(-\infty, -a]$ است. در مسئله‌یِ واقعی می‌خواهیم سطوحِ هم‌پتانسیلِ دو میله‌یِ باردار که یک سرِشان مجاورِ هم است و فاصله‌یِ این دو سر نیز خیلی کوچک‌تر از طولِ دو میله است، را در نزدیکی‌یِ این دو سر به دست آوریم.

۲ پتانسیلِ میله‌یِ رسانایِ باردار

برایِ به دست‌آوردنِ پتانسیلِ یک میله‌یِ رسانا از مختصاتِ بیضوی استفاده می‌کنیم. با استفاده از مختصاتِ بیضوی مسائلِ مختلفی در الکترومغناطیس حل شده‌اند [۳—۱]. دستگاهِ مختصاتِ مناسب برایِ این مسئله دستگاهِ کروی‌یِ کشیده[1] است. برایِ آشنایی با این مختصات می‌توانید مثلاً به کتابِ آرفکن ویرایشِ دوم [۱] مراجعه کنید، در ویرایش‌هایِ جدیدتر بخش‌هایِ مربوط به این نوع مختصات حذف شده‌اند. این دستگاه مختصات از دورانِ دستگاهِ مختصاتِ بیضوی‌یِ دوبعدی حولِ محورِ کشیده‌اش به دست می‌آید[۱]. دستگاهِ کروی‌یِ کشیده با مختصاتِ (u, v, ϕ) به صورتِ زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \rho &= a \sinh u \sin v, \qquad 0 \le u < \infty \\ z &= a \cosh u \cos v, \qquad 0 \le v \le \pi. \end{aligned} \tag{5}$$

(ρ, z, ϕ) مختصاتِ استوانه‌ای هستند.

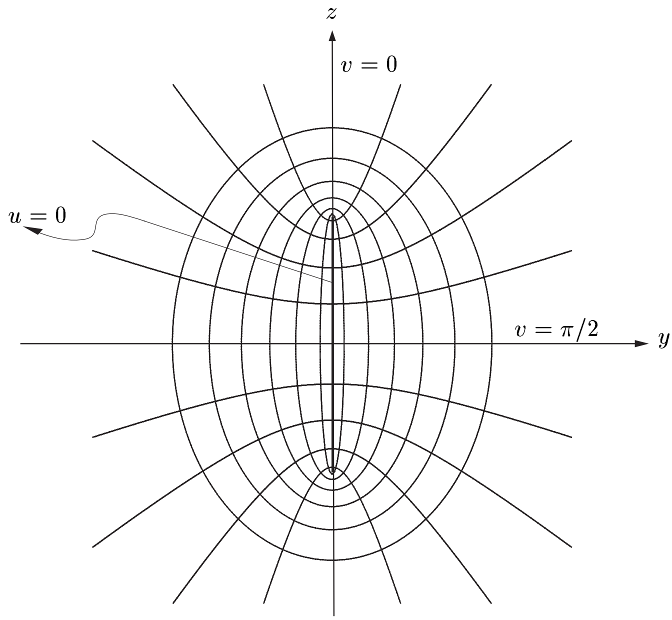
رویه‌هایِ $u-$ ثابت بیضی‌هایی کشیده و دوّار با محورِ تقارنِ z هستند.

$$\frac{\rho^2}{a^2 \sinh^2 u_0} + \frac{z^2}{a^2 \cosh^2 u_0} = 1, \tag{6}$$

و رویه‌هایِ $v-$ ثابت نیز هذلولی‌هایِ دوّاری هستند که محورِ z محورِ تقارنشان است

$$-\frac{\rho^2}{a^2 \sin^2 v_0} + \frac{z^2}{a^2 \cos^2 v_0} = 1, \tag{7}$$

[1] prolate spheroidal



شکلِ ۳: مقطعِ $x=0$ از سطوحِ هم‌پتانسیلِ یک میله‌یِ باردار. بیضی‌ها سطوحِ هم‌پتانسیل، و هذلولی‌ها راستایِ میدانِ الکتریکی هستند.

سطحِ مقطعی از این رویه‌ها در شکلِ ۳ نشان داده شده است (سطحِ $x=0$). از رابطه‌یِ (5) پیداست که $u=0$ پاره‌خطی رویِ محورِ z از $z=-a$ تا $z=a$ است.

عنصرِ طول در این مختصات عبارت است از

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2+\rho^2\mathrm{d}\phi^2 \\ &= a^2[\sinh^2 u+\sin^2 v](\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2)+a^2\sinh^2 u\sin^2 v\mathrm{d}\phi^2. \end{aligned} \tag{8}$$

در این مختصات معادله‌یِ لاپلاس جداشدنی است.

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{a^2(\sinh^2 u+\sin^2 v)}\Big(\frac{1}{\sinh u}\frac{\partial}{\partial u}(\sinh u\frac{\partial}{\partial u}) \\ &\quad +\frac{1}{\sin v}\frac{\partial}{\partial v}(\sin v\frac{\partial}{\partial v})\Big)+\frac{1}{a^2\sinh^2 u\sin^2 v}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \end{aligned} \tag{9}$$

محورِ z را در راستایِ میله‌یِ رسانا می‌گیریم به طوری‌که وسطِ میله مبدأ باشد. مسئله تقارنِ سمتی دارد، بنا بر این پتانسیلِ میله‌یِ رسانا مستقل از ϕ است. یکی از شرط‌های مرزی عبارت است از

$$\Phi(u,v)\Big|_{u\to\infty}=0 \tag{10}$$

توجه داریم که در فواصلِ دور اولین جملهیِ غیرِصفرِ $\Phi(u,v)$ عبارت است از $q/(4\pi\epsilon_0 r)$ که r فاصلهیِ ناظر تا میله و q بارِ کلِ میله است. در ضمن میلهیِ رسانا باید یک خمِ همپتانسیل باشد. اگر ضریبِ ثابتِ a در تبدیلِ مختصات را نصفِ طولِ میله بگیریم این شرطِ مرزی معادلِ این است که $u=0$ یک خمِ همپتانسیل باشد.

با استفاده از جداسازیِ متغیرها داریم

$$\Phi(u,v)=\sum_{\nu}A_\nu U_\nu(u)V_\nu(v) \tag{11}$$

که با جایگذاری در معادلهیِ لاپلاس نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sinh u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\sinh u\ \frac{\mathrm{d}U_\nu(u)}{\mathrm{d}u})=\nu(\nu+1)U_\nu(u),\\
&\frac{1}{\sin v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}(\sin v\ \frac{\mathrm{d}V_\nu(v)}{\mathrm{d}v})=-\nu(\nu+1)V_\nu(v).
\end{aligned} \tag{12}$$

انتخابِ ضریبِ ثابتِ سمتِ راست در معادلههایِ بالا برایِ آن است که معادله شبیهِ معادلهیِ لژاندر شود و ما بتوانیم از جوابهایِ آن استفاده کنیم. با تغییرِ متغیرِ $w:=\cosh\ u$، معادلهیِ مربوط به u به صورتِ زیر در میآید.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\left((1-w^2)\frac{\mathrm{d}U_\nu}{\mathrm{d}w}\right)+\nu(\nu+1)U_\nu=0 \tag{13}$$

درنزدیکییِ میله پتانسیل شبیه یک میلهیِ بینهایت طویل است که جوابش بر حسبِ ρ لگاریتمی است. بنا بر این جوابِ این معادله تابعِ لژاندر از نوعِ دوم است. پس

$$\Phi(u,v)=\sum_{\nu}A_\nu Q_\nu(\cosh\ u)P_\nu(\cos\ v) \tag{14}$$

جملهیِ $\nu=0$ در بسطِ بالا شرطهایِ مرزی را برآورده میکند. یکتاییِ جوابِ معادلهیِ لاپلاس حکم میکند که جواب مسئله همین است. بیایید این موارد را بررسی کنیم

$$\Phi(u,v)=A_0Q_0(\cosh\ u)P_0(\cos\ v)=\frac{A_0}{2}\ln\left(\frac{\cosh u+1}{\cosh u-1}\right) \tag{15}$$

پتانسیل را به شکلِ زیر نیز میتوانیم بنویسم

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{A_0}{2}\ln\left(\frac{e^u+e^{-u}+2}{e^u+e^{-u}-2}\right)=\frac{A_0}{2}\ln\left(\frac{e^{u/2}+e^{-u/2}}{e^{u/2}-e^{-u/2}}\right)^2\\
&= A_0\ln\left(\frac{e^{u/2}+e^{-u/2}}{e^{u/2}-e^{-u/2}}\right)=A_0\ln\left(\coth(u/2)\right)
\end{aligned} \tag{16}$$

اولاً پتانسیل فقط به u بستگی دارد پس رویه‌هایِ $u-$ ثابت از جمله $u=0$ رویه‌هایِ هم‌پتانسیل هستند. در ضمن در حدِّ $u\to 0$ داریم

$$\Phi \to -A_0 \ln u \sim -A_0 \ln \rho \tag{17}$$

این رفتار همان انتظاری را که از میله‌یِ رسانا داریم برآورده می‌کند. در فواصلِ دور یعنی در حدِّ $u\to\infty$ رفتارِ پتانسیل به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= A_0 \ln\left(\frac{1+e^{-u}}{1-e^{-u}}\right) \\ &= A_0 \ln(1+e^{-u}) - A_0 \ln(1-e^{-u}) \\ &\sim 2A_0 e^{-u} \end{aligned} \tag{18}$$

اما در حدِّ $u\to\infty$

$$\rho = (ae^u \sin v)/2, \qquad z = (ae^u \cos v)/2$$

$$\Rightarrow e^{-u} = \frac{a}{2\sqrt{\rho^2+z^2}}. \tag{19}$$

بنا بر این در فواصلِ دور پتانسیل عبارت است از

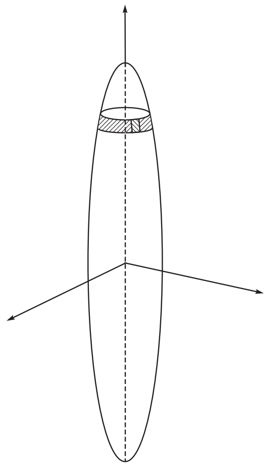
$$\Phi(u) \sim \frac{aA_0}{\sqrt{\rho^2+z^2}}. \tag{20}$$

در فواصل دور ما انتظار داریم که پتانسیلِ میله $\Phi(u)\sim q/4\pi\epsilon_0 r$ باشد. با مقایسه این دو مقدار ثابتِ $A_0 = q/(4\pi\epsilon_0 a)$ می‌شود. بنا بر این پتانسیلِ میله‌یِ رسانا عبارت است از

$$\Phi(u) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \ln\left(\coth(u/2)\right) \tag{21}$$

حالا برگردیم به این سئوال که بار رویِ میله‌یِ رساناایِ محدود چه‌گونه توزیع می‌شود. برایِ آن که چگالی‌یِ طولی‌یِ بار رویِ میله را به دست آوریم کافی است فرض کنیم به جایِ میله‌یِ رسانا یکی دیگر از سطوح هم پتانسیل که در نزدیکی‌یِ این میله رسانا است یک سطحِ رسانا است و بار رویِ آن پخش شده. این سطح یک بیضی‌یِ دوّار است. میدانِ الکتریکی رویِ این سطح متناسب با چگالی‌یِ بارِ سطحی رویِ بیضی‌یِ دوّار است.

$$\mathbf{E} \quad = \quad -\nabla\Phi(u) = -\frac{\mathbf{e}_u}{h_u}\,\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}u}$$



شکلِ ۴: میله‌یِ رسانا را با یک بیضی‌گونِ بسیار کشیده تقریب زده ایم. برای محاسبه‌یِ چگالی‌یِ سطحی‌یِ بار، عنصرِسطحی به شکلِ بالا در نظر می‌گیریم.

$$= \quad \frac{1}{4\,\pi\,\epsilon_0}\frac{q\ \mathbf{e}_u}{a^2\sinh u\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}} \tag{22}$$

میدانِ الکتریکی در حدِّ $u \to 0$ عبارت است از

$$\mathbf{E}\Big|_{u\to 0} = \frac{q\ \mathbf{e}_u}{4\pi\epsilon_0 a^2 u\sin v} \tag{23}$$

با استفاده از قضیه‌یِ گاوس چگالی‌یِ بارِ سطحی رویِ بیضی‌گون به دست می‌آید.

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{e}_u\ h_\phi \mathrm{d}\phi\ h_v \mathrm{d}v = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\ h_\phi\mathrm{d}\phi\ h_v\mathrm{d}v \quad\Rightarrow\quad \sigma = \frac{q}{4\pi a^2 u\sin v} \tag{24}$$

برایِ به دست آوردنِ چگالی‌یِ طولی‌یِ بارِ میله کافی است در حدِّ $u \to 0$ یعنی در حدّی که بیضی‌گونِ دوّار به میله تبدیل می‌شود روی ϕ جمع ببندیم. پس

$$\begin{aligned} -\lambda\,\mathrm{d}z &= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{q}{4\pi a^2 u\sin v}\,h_\phi\,\mathrm{d}\phi\,h_v\,\mathrm{d}v \\ &= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{q}{4\,\pi\,a^2\,u\,\sin v}\,a\,u\sin v\,\mathrm{d}\,\phi\,a\ \sin v\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{q}{2}\sin v\,\mathrm{d}v = -\frac{q}{2a}\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{25}$$

علامتِ منفی در سمتِ چپ به خاطرِ آن است که با افزایشِ v، z کم می‌شود. از این‌جا چگالی‌ِ طولی‌ِ بارِ میله‌ِی رسانا مقدارِ ثابتِ $\lambda = q/(2a)$ به دست می‌آید. ممکن است در وهله‌ِی اول این توزیع کمی عجیب به نظر برسد. از مثال‌هایِ سه بعدی می‌دانیم که بارها رویِ لبه‌ها و نقاطِ نوک‌تیز بیش‌تر جمع می‌شوند و ممکن است در این حالت نیز انتظار داشته باشیم بار رویِ نوک‌هایِ میله بیش‌تر جمع شوند. اما نکته‌ِی متفاوت در این مورد این است که ما میله را یک موجودِ یک‌بُعدی گرفته‌ایم که همه‌ِی نقاطِ آن نوک‌تیز است و مثلِ لبه‌ِی یک جسمِ با بُعدِ بالاتر رفتار می‌کند. نکته‌ِی آخر این که همیشه هم به شهودِ خودمان اعتماد نکنیم، حرفِ آخر را محاسبه می‌زند.

قدردانی— لازم می‌دانیم از محمدِ خرمی برایِ پیش‌نهادهایِ مفیدی که در موردِ این مقاله داشت، تشکر کنیم.

۳ مرجع‌ها

[1] Arfken, George A.; Mathematical Methods for physicists; 2nd edition, Academic Press.

[2] Smythe, W. R.; Static and dynamic electricity, 3rd edition, McGraw-Hill

[۳] محمد خرمی؛ مختصاتِ بیضوی در چند مسئله‌ِی الکترومغناطیس، x1-010. هم‌چنین گاما شماره‌ِی ۷ (۱۳۸۴) ۲۸ تا ۴۳.