تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی

امیر آقامحمدی

چکیده ـ این مقاله مروری مقدماتی است در موردِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی. در ابتدا تعمیمی از معادله‌هایِ ماکسول و نیروی لورنتز ارائه می‌شود. در موردِ حرکتِ یک بارِ الکتریکی در حضورِ یک تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی نیز بحث می‌شود.

۱ مقدمه

تا جایی‌که نتیجه‌یِ پژوهش‌هایِ تجربی نشان می‌دهد تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی تا کنون مشاهده نشده. هرچند مواردی وجود دارد که ادعا شده تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی را مشاهده کرده‌اند، [1]، اما این ادعاها هیچ‌گاه تأیید نشده. اما به لحاظِ نظری نه تنها مانعی برایِ وجود آن‌ها نیست، بل‌که بعضی‌ها (مثلاً شویینگر [2]) اعتقاد دارند ممکن است این ذرات وجود داشته باشند و نقشِ مهمی هم در تکوینِ عالم ایفا کنند.

معادله‌هایِ ماکسولِ عادی طوری نوشته شده که تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی وجود ندارد، اما معادله‌هایِ ماکسول را می‌توان طوری تعمیم داد که بار وجریانِ مغناطیسی را هم شامل شود. نظریه‌هایِ مختلفی هم وجود دارند که پیش نهاد می‌کنند تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی وجود داشته باشد. در این مقاله می‌خواهیم با تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی آشنا شویم. تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی در بعضی از کتاب‌ها از جمله مراجعِ [2-5] بررسی شده‌اند.

۲ تعمیمِ معادله‌هایِ ماکسول

معادله‌هایِ ماکسول به شکلِ زیراند.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

در صورتی که بار و جریانِ الکتریکی وجود نداشته باشد، $\rho = 0$، $\mathbf{J} = 0$ و در معادله‌هایِ بالا تقارنی بینِ میدانِ الکتریکی $\mathbf{E}$ و میدانِ مغناطیسی $\mathbf{B}$ دیده می شود. اگر $\mathbf{E}$ را به $c\mathbf{B}$ و هم‌زمان $c\mathbf{B}$ را به $-\mathbf{E}$ تبدیل کنیم معادله‌ها عوض نمی‌شوند. توجه داشته باشیم که $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. اما حضورِ بار و جریانِ الکتریکی این تقارن را می‌شکنند. یک سئوالِ طبیعی که می‌تواند مطرح شود این است که آیا بار و جریانِ مغناطیسی هم وجود دارد؟

بارِ مغناطیسی اگر وجود داشته باشد، چشمه‌یِ میدانِ مغناطیسی است، و اگر حرکت کند یک جریانِ مغناطیسی به وجود می‌آورد، و معادله‌هایِ ماکسول باید تغییر کنند؛ قاعدتاً به این نحو:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_e/\epsilon_0, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m, \tag{6}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{8}$$

از این معادله‌ها نتیجه می‌شود که بقایِ بارِ الکتریکی داریم

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

و درست مشابهِ آن بارِ مغناطیسی هم پایسته است

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

این معادله‌ها تقارنِ جالبی دارند؛ با تبدیلِ

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{E} \to c\mathbf{B}, & c\rho_e \to \rho_m, & c\mathbf{J}_e \to \mathbf{J}_m, \\ c\mathbf{B} \to -\mathbf{E}, & \rho_m \to -c\rho_e, & \mathbf{J}_m \to -c\mathbf{J}_e, \end{array} \right. \tag{11}$$

معادله‌هایِ ماکسولِ تعمیم‌یافته عوض نمی‌شوند. در واقع معادله‌هایِ ماکسولِ تعمیم‌یافته تحتِ تبدیلِ بزرگتری متقارن هستند. این تبدیل دوران به اندازه‌یِ θ در فضایِ دو بعدی‌یِ فرضی‌ای که از ($\mathbf{E}$ و $c\mathbf{B}$)، (و همین‌طور ($c\rho_e$ و ρ_m) و ($c\mathbf{J}_e$ و $\mathbf{J}_m$)) ساخته می‌شود است.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ c\mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ c\mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{pmatrix} c\rho'_e \\ \rho'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho_e \\ \rho_m \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{pmatrix} c\mathbf{J}'_e \\ \mathbf{J}'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\mathbf{J}_e \\ \mathbf{J}_m \end{pmatrix} \tag{14}$$

مثلاً

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nabla\cdot\mathbf{E}' \\ \nabla\cdot c\mathbf{B}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\cdot\mathbf{E} \\ \nabla\cdot c\mathbf{B} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_e/\epsilon_0 \\ c\mu_0\rho_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho'_e/\epsilon_0 \\ c\mu_0\rho'_m \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{15}$$

تبدیلِ (11) به ازایِ $\theta = \pi/2$ به دست می‌آید. چگالی‌یِ انرژی‌یِ میدانِ الکترومغناطیسی که از معادله‌هایِ ماکسول به دست می‌آید، هم تحتِ این تبدیل ناورداست

$$u' = \frac{\epsilon_0}{2}\left|\mathbf{E}'\right|^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left|\mathbf{B}'\right|^2 = \frac{\epsilon_0}{2}|\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0}|\mathbf{B}|^2 = u. \tag{16}$$

فرض کنید ذره‌ای بارِ الکتریکی‌یِ q_e و بارِ مغناطیسی‌یِ q_m داشته باشد. اگر در یک میدانِ الکترومغناطیسی‌یِ $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ سرعتِ این ذره $\mathbf{v}$ باشد، به آن نیرویی که تعمیمِ نیرویِ لورنتز است وارد می‌شود. این نیرو باید قاعدتاً به شکلِ زیر باشد

$$F = q_e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) + q_m(\mathbf{B} - \mathbf{v}\times\mathbf{E}). \tag{17}$$

نیرویِ $\mathbf{F}$ تحتِ تبدیلِ (12) ناورداست، یعنی

$$\begin{aligned} F' &= q'_e(\mathbf{E}' + \mathbf{v}\times\mathbf{B}') + q'_m(\mathbf{B}' - \mathbf{v}\times\mathbf{E}') \\ &= q_e(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) + q_m(\mathbf{B} - \mathbf{v}\times\mathbf{E}). \end{aligned} \tag{18}$$

حالا ببینیم معنایِ تبدیلِ (12) چیست. اگر تمامِ بارهایِ دنیا تحتِ این تبدیل عوض شوند، اندازه‌یِ بارهایِ الکتریکی و مغناطیسی و هم‌چنین میدان‌هایِ الکتریکی و مغناطیسی عوض می‌شوند، اما آن‌چه مشاهده‌پذیر است خود میدان‌ها نیستند بل‌که نیرویی است که به یک ذره‌یِ باردار وارد می‌شود. اما این نیرو تحتِ تبدیلِ (12) عوض نمی‌شود. پس اندازه‌یِ بارهایِ الکتریکی و مغناطیسی واقعاً مشاهده‌پذیر نیستند. باید یک پیمانه‌یِ خاص انتخاب کنیم مثلاً این پیمانه که الکترون ذره‌ای است که بارِ الکتریکی‌اش $-1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ و بارِ مغناطیسی‌اش صفر است. تبدیلِ پیمانه معادلِ تبدیلِ (12) است.

$$\begin{cases} -ce = cq_e \cos\alpha + q_m \sin\alpha, \\ 0 = -cq_e \sin\alpha + q_m \cos\alpha \end{cases} \tag{19}$$

در واقع ممکن هم هست که بگوییم الکترون ذره‌ای است که بارِ الکتریکی و مغناطیسی‌اش عبارت اند از

$$q_e = -e\cos\alpha, \quad q_m = -ce\sin\alpha. \tag{20}$$

اگر نسبتِ q_e/q_m برایِ همه‌یِ ذراتِ دنیا یکی باشد با یک تبدیل پیمانه‌ای با $\alpha = \arctan(cq_e/q_m)$، می‌توان بارِ مغناطیسی‌یِ همه‌یِ ذرات را صفر کرد. در پیمانه‌ای که بارِ مغناطیسی‌یِ الکترون صفر است، اندازه‌یِ بارهایِ الکتریکی و مغناطیسی‌یِ بقیه‌یِ ذرات معین می‌شود. مثلاً با توجه به این‌که شدتِ میدانِ مغناطیسی رویِ سطحِ زمین $10^{-4}\ \mathrm{T}$ است، با دقتِ 10^{-20} بارِ مغناطیسی‌یِ پروتون صفر و بارِ الکتریکی‌اش $1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$ است. در این پیمانه‌یِ خاص اگر بارِ مغناطیسی‌یِ همه‌یِ ذرات صفر باشد، به همان معادلات مرسوم ماکسول می‌رسیم. بنا بر این شکلِ درست‌ترِ سئوالِ وجودِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی‌یِ این است که آیا ذره‌ای در جهان هست که نسبتِ بارِ الکتریکی به بارِ مغناطیسی‌اش با بقیه‌یِ ذراتِ دنیا فرق داشته باشد؟

به ذراتی که هم بارِ الکتریکی و هم بارِ مغناطیسی داشته باشند دایون[1] گفته می‌شود. دیراک اولین کسی بود که توجیهی نظری برایِ وجودِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی ارائه داد. یکی از سئوال‌هایِ فیزیک‌پیشه‌ها این است که "چرا بارهایی الکتریکی‌ای که تا کنون مشاهده شده‌اند کوانتیزه هستند؟" چرا همه‌یِ بارها متناسب با e اندازه‌یِ بارِ الکترون هستند؟ حالا ممکن است بارِ بنیادی‌یِ طبیعت را بارِ کوارک‌ها یعنی $e/3$ بگیریم. توجیهِ دیراک به این سئوال هم پاسخ می‌دهد. او نشان داد اگر فقط یک تک قطبی‌یِ مغناطیسی هم در طبیعت یافت شود کوانتشِ تکانه‌یِ زاویه‌ای‌یِ مجموعه‌ای شاملِ این تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی و یک بارِ الکتریکی مثلاً الکترون منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود

$$e\, q_m = \frac{2\, n\, h}{\mu_0}. \tag{21}$$

که q_m بارِ تک قطبی‌یِ مغناطیسی و n عددی صحیح است. بنا بر این همه‌یِ بارهایِ الکتریکی در طبیعت باید ضریبِ صحیحی از یک مقدارِ معین باشند. همین استدلال می‌گوید بارهایِ مغناطیسی هم باید کوانتیزه باشند. اگر بارِ الکترون را پایه بگیریم با فرضِ $n = 1$ خواهیم داشت

$$q_m = \frac{2\,h}{\mu_0\,e} = 1.0 \times 10^{-20}\,\mathrm{C\,m\,s^{-1}} \tag{22}$$

با آن که این عدد کوچک به نظر می‌آید اما در واقع این کوانتومِ بارِ مغناطیسی مقدارِ بسیار بزرگی است، زیرا آن چه که مهم است ضریب جفت‌شدگی‌یِ مغناطیسی است. یاد آوری می‌کنیم که ضریبِ جفشدگی‌یِ الکتریکی هست

$$\alpha_e = \frac{e^2}{4\,\pi\,\epsilon_0\,\hbar\,c} = \frac{1}{137}. \tag{23}$$

متناظراً، ضریبِ جفت‌شدگی‌یِ مغناطیسی می‌شود

$$\alpha_m = \frac{q_m^2\,\mu_0}{4\,\pi\,\hbar\,c}. \tag{24}$$

اگر (22) را در این فرمول جاگذاری کنیم خواهیم دید که

$$\alpha_m = \frac{1}{\alpha_e} = 137. \tag{25}$$

به این معنی است که کوانتومِ بارِ مغناطیسی بزرگ است، و بنابراین در پراکندگی‌هایِ شاملِ تک‌قطبی‌هایِ مغناطیسی، نمی‌توان از روش‌هایِ اختلالی برایِ حلِ مسئله استفاده کرد.

اگر بخواهیم بر مبنایِ فیزیکِ کلاسیک تخمینی برایِ جرمِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی داشته باشیم، تک‌قطبی‌ای که بارش کوانتومِ بارِ مغناطیسی باشد، باید فرض‌هایی بکنیم. با فرض‌هایِ مختلف جواب‌هایِ مختلفی به دست می‌آید. یک فرض این است که شعاعِ کلاسیکِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی را همان شعاعِ کلاسیک الکترون بگیریم. در این صورت جرمِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی تقریباً $2.4\ \mathrm{GeV/c^2}$ یعنی تقریباً 2.5 برابرِ جرم ِ پروتون خواهد بود. در نظریه‌هایِ وحدت یافته‌یِ بزرگ، GUT[2]، در شکستِ خودبه‌خودِ تقارنِ گروهِ وحدت‌یافته‌یِ بزرگ به زیرگروه‌هایِ خود وجودِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی هم پیش‌نهاد می‌شود. بر مبنایِ این نظریه‌ها جرمِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی از مرتبه‌یِ $10^{16} - 10^{17}\ \mathrm{GeV/c^2}$ است. بنا بر این اگر این نظریه‌ها درست باشند نباید انتظار داشته باشیم که در شتاب‌دهنده‌ها تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی هم تولید شود. البته ممکن است در ثانیه‌هایِ اولِ خلقِ جهان این ذرات تولید شده باشند. چون بارِ مغناطیسی هم بقاء دارد، این ذرات پایدار هستند و ممکن است در تابش‌هایِ کیهانی بتوان آن‌ها را آشکار کرد. زمانی در معدن‌هایِ موادِ مغناطیسی هم به دنبالِ این ذرات می‌گشتند. وقتی از ماه سنگ‌هایی به زمین آورده شدند، یکی از آزمایش‌ها بررسی‌یِ آن‌ها از نظرِ وجودِ تک‌قطبی‌یِ

مغناطیسی‌یِ بود. اما تاکنون هیچ آزمایشِ تاییدشده‌ای در موردِ آشکارسازی‌یِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی وجود ندارد.

۳ مثال: حرکتِ بارِ الکتریکی در میدانِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی

پوانکاره در سالِ ۱۸۹۶ مسئله‌یِ حرکتِ یک ذره که فقط بارِ الکتریکی دارد را در حضورِ ذره‌یِ دیگری که فقط بارِ مغناطیسی حل کرد. فرض کنید ذره‌ای با بارِ الکتریکی‌یِ q و جرمِ m در حضورِ بارِ مغناطیسی‌یِ q_m که در مبدأ ساکن است، حرکت می‌کند. بارِ مغناطیسی را آن‌قدر سنگین فرض کنیم که بتوان از حرکتِ آن چشم‌پوشی کرد. میدانِ مغناطیسی‌یِ ناشی از بارِ مغناطیسی‌یِ q_m، شبیهِ میدانِ الکتریکی‌یِ ناشی از یک بارِ نقطه‌ای‌یِ الکتریکی است

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m \mathbf{r}}{r^3}. \tag{26}$$

معادله‌یِ حرکتِ بارِ q، عبارت است از

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r^3}\ \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}. \tag{27}$$

اگر دو طرفِ رابطه‌یِ (27) را در $\dot{\mathbf{r}}$ ضربِ داخلی کنیم نتیجه می‌شود $\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = 0$. البته این مطلب واضح است زیرا نیرویِ مغناطیسی کار انجام نمی‌دهد و انرژی جنبشی و در نتیجه اندازه‌یِ سرعتِ ذره ثابت می‌ماند. بردارِ $\mathbf{J}$

$$\mathbf{J} := m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\mathbf{r}. \tag{28}$$

هم ثابتِ حرکت است. این کمیت تعمیمی از تکانه‌یِ زاویه‌ای است. تکانه‌یِ زاویه‌ای‌یِ دستگاه دوذره‌ای که یکی بارِ الکتریکی و دیگری بارِ مغناطیسی دارد پایسته نیست، ولی $\mathbf{J}$ که شاملِ تکانه‌یِ زاویه‌ای‌یِ میدانِ الکترومغناطیسی هم هست پایسته است.

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{J}} &= m\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + m\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} - \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_0 q q_m \dot{r}}{4\pi r^2}\mathbf{r} \\
&= \mathbf{r} \times \left(\frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r^3}\ \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}\right) - \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_0 q q_m \dot{r}}{4\pi r^2}\mathbf{r} \\
&= \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r^3}\left(\dot{\mathbf{r}}\ r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\right) - \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\dot{\mathbf{r}} + \frac{\mu_0 q q_m \dot{r}}{4\pi r^2}\mathbf{r} = 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

$\mathbf{J}$ برداری است که جهت و اندازه‌اش به شرایطِ اولیه بستگی دارد و با حرکتِ ذره ثابت می‌ماند. $\mathbf{J}$ از جمعِ دو بردارِ عمود بر هم ساخته شده، مثلِ وتر در مثلثِ قائم‌الزاویه، پس اندازه‌اش باید از اندازه‌یِ هردو بزرگ تر باشد. پس $J > \frac{|\mu_0 q q_m|}{4\pi}$. با استفاده از (28) داریم

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{J} = rJ\cos\theta = -\frac{\mu_0 q q_m r}{4\pi}, \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = -\frac{\mu_0 q q_m}{4\pi J}. \tag{30}$$

پس ذره در مسیری حرکت می‌کند که زاویه‌یِ بینِ بردارِ مکان با بردارِ ثابتِ $\mathbf{J}$ ثابت بماند. پس ذره رویِ رویه‌ای به شکلِ مخروط حرکت می‌کند. زاویه‌یِ نیم‌رأسِ مخروط، θ، به شرایطِ اولیه بستگی دارد. با استفاده از بردارِ $\mathbf{J}$، سرعت را می‌توان از معادله‌یِ حرکت، (27)، حذف کرد

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_0 q q_m}{4\pi m r^3}\left(\mathbf{J} + \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\mathbf{r}\right) \tag{31}$$

بردارِ مکان را به دو بخشِ $\mathbf{r}_\parallel$ و $\mathbf{r}_\perp$ تجزیه می‌کنیم،

$$\mathbf{r}_\parallel = (\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{J}})\hat{\mathbf{J}} \tag{32}$$

$$\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\parallel = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{J}})\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{J}}\times(\mathbf{r}\times\hat{\mathbf{J}}). \tag{33}$$

توجّه کنید که داریم

$$r_\perp = r\sin\theta, \qquad r_\parallel = r\cos\theta. \tag{34}$$

معادله‌یِ حرکتِ $\mathbf{r}_\parallel$ و $\mathbf{r}_\perp$ عبارت اند از

$$m\ddot{\mathbf{r}}_\perp = -\frac{q^2 q_m^2}{16\pi^2 m r^4}\mathbf{r}_\perp \tag{35}$$

$$m\ddot{\mathbf{r}}_\parallel = -\frac{\mu_0 q q_m}{4\pi m r^3}\left(\mathbf{J} + \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\mathbf{r}_\parallel\right). \tag{36}$$

چون ذره رویِ مخروط حرکت می‌کند اگر $\mathbf{r}_\perp$ را داشته باشیم مکانِ ذره عملاً معین است. بیایید تحولِ $\mathbf{r}_\perp$ را بررسی کنیم.

$$m\ddot{\mathbf{r}}_\perp = -\frac{q^2 q_m^2 \sin^4\theta}{16\pi^2 m r_\perp^4}\mathbf{r}_\perp \tag{37}$$

اگر رابطه‌یِ (28) را در $\hat{\mathbf{J}}$ ضربِ داخلی کنیم و از (30) استفاده کنیم، نتیجه می‌شود

$$J = m\,\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} - \frac{\mu_0 q q_m}{4\pi r}\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{r}$$

$$
\begin{aligned}
&= m\,\dot{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{J}}\times\mathbf{r}+J\cos^2\theta && (38)\\
J\sin^2\theta &= J\left(1-\cos^2\theta\right)\\
&= m\left(\dot{\mathbf{r}}_{\parallel}+\dot{\mathbf{r}}_{\perp}\right)\cdot\hat{\mathbf{J}}\times\mathbf{r}_{\perp}\\
&= m\,\dot{\mathbf{r}}_{\perp}\cdot\hat{\mathbf{J}}\times\mathbf{r}_{\perp}\\
&= m\,\hat{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{r}_{\perp}\times\dot{\mathbf{r}}_{\perp}. && (39)
\end{aligned}
$$

در این‌جا از $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ استفاده کرده‌ایم. پس

$$
m\mathbf{r}_{\perp}\times\dot{\mathbf{r}}_{\perp}=\mathbf{J}\sin^2\theta \tag{40}
$$

اگر محورِ z را $\hat{\mathbf{J}}$ بگیریم $\mathbf{r}_{\perp}=\rho\hat{\rho}$. حلِ مسئله‌یِ $\mathbf{r}_{\perp}$ تبدیل می‌شود به حلِ یک مسئله با نیرویِ مرکزی‌ای که با ρ^{-3} متناسب است و تکانه‌زاویه‌ای هم $\mathbf{J}\sin^2\theta$ ثابتِ حرکت است.

$$
\begin{aligned}
&m(\ddot{\rho}-\rho\dot{\phi}^2)=-\frac{q^2q_m^2\sin^4\theta}{16\pi^2m\rho^3}\\
&m\rho^2\dot{\phi}=J\sin^2\theta. && (41)
\end{aligned}
$$

که از این‌جا نتیجه می‌شود

$$
m\ddot{\rho}+\frac{\sin^4\theta}{m\rho^3}\left(\frac{q^2q_m^2}{16\pi^2}-J^2\right)=0. \tag{42}
$$

بیایید از همانِ روشی که در حلِ مسائلِ نیروهایِ مرکزی مرسوم است، استفاده کنیم. با تعریفِ $u:=1/\rho$ و استفاده از $u^2=m\dot{\phi}/(J\sin^2\theta)$ خواهیم داشت:

$$
\dot{\rho}=-\frac{\dot{u}}{u^2}=-\frac{J\sin^2\theta}{m}\frac{\dot{u}}{\dot{\phi}}=-\frac{J\sin^2\theta}{m}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\phi} \tag{43}
$$

$$
\ddot{\rho}=-\frac{J^2\sin^4\theta}{m^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}. \tag{44}
$$

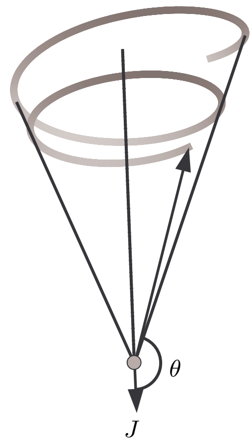
با استفاده از این‌ها نتیجه می‌شود

$$
\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\phi^2}+u\sin^2\theta=0 \tag{45}
$$

و از آن

$$
u=A\cos[(\phi-\phi_0)\sin\theta)]. \tag{46}
$$

با انتخابِ مناسبِ محورهایِ مختصات می‌توانیم ϕ_0 را صفر انتخاب کنیم. بالاخره مسیرِ بارِ الکتریکی در حضورِ تک‌قطبی‌یِ مغناطیسی به دست می‌آید



شکل ۱:   مسیرِ یک‌بارِ در حضورِ یک تک‌قطبیِ مغناطیسی

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos[\phi \sin\theta)]}, \tag{47}$$

$$z = \rho \cot\theta. \tag{48}$$

وقتی بارِ الکتریکی به اندازه‌یِ $\phi = \pi/(2\sin\theta)$ دورِ بردارِ $\mathbf{J}$ بچرخد، به فاصله‌یِ بی‌نهایت‌دور از تک قطبی‌یِ مغناطیسی رسیده.

در خاتمه بیایید از پایستگی‌یِ انرژی‌یِ ذره استفاده کنیم

$$E = \frac{1}{2}m\,v_0^2 = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\phi^2 + \dot z^2)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot\rho^2}{\sin^2\theta} + \frac{J^2\sin^4\theta}{m^2\rho^2}\right) \tag{49}$$

از این جا $\dot\rho$ به دست می‌آید.

$$\dot\rho^2 = \sin^2\theta\left(v_0^2 - \frac{J^2\sin^4\theta}{m^2\rho^2}\right). \tag{50}$$

یک ρ_c وجود دارد که $\dot\rho$ در آن نقطه صفر می‌شود.

$$\rho_c = \frac{J \sin^2 \theta}{m v_0}. \tag{51}$$

متناظر با ρ_c فاصله‌ای مثلِ r_c وجود دارد که نزدیک‌ترین فاصله‌یِ ممکن بینِ بارِ الکتریکی و بارِ مغناطیسی است. شرایطِ اولیه ممکن است به گونه‌ای باشد که بارِ الکتریکی به بارِ مغناطیسی نزدیک شود ولی کمینه فاصله‌شان r_c است.

$$r_c = \frac{J \sin \theta}{m v_0}. \tag{52}$$

۴ مراجع

[1] Price P. B., Shirk E. K., Osborne W. Z., & Pinsky S., Phys. Rev. Lett. **35**, 487 (1975); Cabrera B., Phys. Rev. Lett. **48**, 1378 (1982).

[2] Schwinger J., DeRaad L. L., Milton K. A., Tsai W., Classical Electrodynamics, Perseus Books.

[3] Griffiths D. J., Introduction to Electrodynamics, 3rd edition, Prentice Hall.

[4] Greiner W., Classical Electrodynamics, Springer.

[5] Jackson J. D., Introduction to Electrodynamics, John Wiley & Sons, Inc.

نام‌های خاص

[1]Dyon; [2]Grand Unified Theories;